ĐẠO HÀM VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN (PHẦN 1)

Đạo hàm là một khái niệm mới đối với học sinh lớp 11, khi học đạo hàm đỏi hỏi học sinh phải nhớ công thức tính đạo hàm theo định nghĩa hay theo công thức tính đạo hàm và một số thủ thuật dùng máy tính để làm bài trắc nghiệm về đạo hàm. Để phần nào giúp các em học sinh và quý bạn đọc có cái nhìn khái quát về kiến thức cơ bản và cách giải một số bài toán liên quan liên quan đến đạo hàm. Tôi đã hệ thống hóa kiến thức lý thuyết cơ bản, phân loại một số bài toán thường gặp như sau:

Bài toán 1: Liên quan đến tính đạo hàm theo định nghĩa, theo công thức đạo hàm

Bài toán 2: Liên quan đến ý nghĩa vật lý của đạo hàm

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I . TÍNH ĐẠO HÀM THEO ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

1. ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1.1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$$

Chú ý:

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số x tại x_0.

Đại lượng $\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số.

Như vậy

$$\boxed{y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

1.2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số x tại x_0, tính $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tìm $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

1.3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí 1

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0.

Chú ý:

a) Nếu $y=f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

b) Nếu $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì có thể không có đạo hàm tại x_0.

1.4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lí 2

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Định lí 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

1.5. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Cường độ dòng điện tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

2. ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó, ta gọi hàm số $f': (a;b) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

II. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Định lí 1

Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Định lí 2

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

2.1. Định lí

Định lí 3

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$

2.2. Hệ quả

Hệ quả 1

Nếu k là một hằng số thì $(ku)' = ku'$.

Hệ quả 2

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

Định lí 4

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u . u'_x$.

III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Giới hạn của $\dfrac{\sin x}{x}$

Định lý 1

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

2. Đạo hàm của hàm số $y=\sin x$

Định lý 2

Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$.

Nếu $y=\sin u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\sin u)'=u'.\cos u}$.

3. Đạo hàm của hàm số $y=\cos x$

Định lý 3

Hàm số $y=\cos x$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$.

Nếu $y=\cos u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\cos u)'=-u'\sin u}$.

4. Đạo hàm của hàm số $y=\tan x$

Định lý 4

Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $\boxed{(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

Nếu $y=\tan u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}}$.

5. Đạo hàm của hàm số $y=\cot x$

Định lý 5

Hàm số $y=\cot x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

Nếu $y=\cot u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}}$.

IV. ĐẠO HÀM CẤP 2

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x\in(a;b)$. Khi đó, hệ thức $y'=f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a;b)$. Nếu hàm số $y'=f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y=f(x)$ và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Chú ý:

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 4)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.}$$

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t.

B. ÁP DỤNG

❍ BÀI TOÁN 1: LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH ĐẠO

I. DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = \dfrac{1}{4}.$ **B.** $f'(0) = \dfrac{1}{16}.$ **C.** $f'(0) = \dfrac{1}{32}.$ **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn.

Áp dụng CT: $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$

Ta có $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} - \dfrac{1}{4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)} = \dfrac{1}{16}.$ **Chọn B.**

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = \dfrac{3}{2}.$ **B.** $f'(1) = 1.$ **C.** $f'(1) = 0.$ **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn.

Xét $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-3)}{x-2} = 2.$

Ta thấy: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$. Do đó, hàm số không tiên tục tại điểm $x = 1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 1$. **Chọn D.**

Câu 3. Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\dfrac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

A. $b = 3.$ **B.** $b = 6.$ **C.** $b = 1.$ **D.** $b = -6.$

Hướng dẫn.

Để hàm số có đạo hàm tại $x=2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=2$, tức là $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}+bx-6\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2+2b-6=4 \Leftrightarrow b=6.$

Thử lại với $b=6$, ta có

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}+bx-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}+6x-10}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{10-x}{2}=4;$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x=2.$ **Chọn B.**

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $a,\ b$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=1, b=-\dfrac{1}{2}.$ **B.** $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}.$ **D.** $a=1, b=\dfrac{1}{2}.$

Hướng dẫn.

- Hàm số có đạo hàm tại $x=1$, do đó hàm số liên tục tại $x=1$.

$\Leftrightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x) \longrightarrow a+b=\dfrac{1}{2}.$ $\qquad (1)$

- Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+} a=a\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{2}=1\end{cases}.$

Hàm số có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow a=1.$ $\qquad (2)$

Từ (1) và (2), ta có $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$. **Chọn A.**

II. DẠNG 2: TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG CÔNG THỨC

DẠNG 2.1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM: ĐA THỨC, PHÂN THỨC, CHỨA CĂN

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=-x^4+4x^3-3x^2+2x+1$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=4.$ **B.** $f'(-1)=14.$ **C.** $f'(-1)=15.$ **D.** $f'(-1)=24.$

Hướng dẫn.

Ta có: $f'(x)=-4x^3+12x^2-6x+2$.

Suy ra $f'(-1)=-4(-1)^3+12(-1)^2-6(-1)+2=24$. **Chọn C.**

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}.$ **C.** $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}.$ **D.** $y'=\dfrac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}.$

Hướng dẫn.

Ta có $y=x-\dfrac{3}{x+2}\Rightarrow y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **Chọn A.**

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ tại điểm $x=1$.

A. $f'(1)=-4.$ **B.** $f'(1)=-3.$ **C.** $f'(1)=-2.$ **D.** $f'(1)=-5.$

Hướng dẫn.

Ta có $f'(x)=\dfrac{(x^2+x)'(x-2)-(x^2+x)(x-2)'}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}\longrightarrow f'(1)=-5.$ **Chọn D.**

Câu 8. Hàm số nào sau đây có đạo hàm là hàm số $2x+\dfrac{1}{x^2}$?

A. $y=\dfrac{x^3-1}{x}.$ **B.** $y=\dfrac{3(x^2+x)}{x^3}.$ **C.** $y=\dfrac{x^3+5x-1}{x}$ **D.** $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x}$

Hướng dẫn.

Kiểm tra đáp án A: $y=\dfrac{x^3-1}{x}=x^2-\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'=2x+\dfrac{1}{x^2}$ (đúng). **Chọn A.**

Câu 9. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$.

A. $y'=\dfrac{-3x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-x^2+x+3}{(x^2+3)^2}$. **C.** $y'=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{-7x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$.

Hướng dẫn.

Ta có: $y'=\dfrac{(-2x^2+x-7)'(x^2+3)-(x^2+3)'(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2}$

$\Rightarrow y'=\dfrac{(-4x+1)(x^2+3)-2x.(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$. **Chọn C.**

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$ tại điểm $x=1$.

A. $f'(1)=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $f'(1)=1.$ **C.** $f'(1)=0.$ **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x=1$ thì $f'(x)$ không xác định. **Chọn D.**

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x^3}$.

A. $y'=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **C.** $y'=\dfrac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **D.** $y'=\dfrac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Hướng dẫn.

Ta có $y'=\dfrac{2x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. **Chọn A.**

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$ với $x>0.$ Giá trị $f'(8)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{6}.$ **B.** $\dfrac{1}{12}.$ **C.** $-\dfrac{1}{6}.$ **D.** $-\dfrac{1}{12}.$

Hướng dẫn.

Với $x>0\Rightarrow f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}.$

Khi đó $f'\left(x\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\longrightarrow f'\left(8\right)=\frac{1}{3}.8^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3}2^{-2}=\frac{1}{12}.$ **Chọn B.**

Câu 13. Cho hàm số $f\left(x\right)=k.\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$. Với giá trị nào của k thì $f'\left(1\right)=\frac{3}{2}$?

A. $k=1.$ **B.** $k=\frac{9}{2}.$ **C.** $k=-3.$ **D.** $k=3.$

Hướng dẫn.

Ta có $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ và $\left(\sqrt[3]{u}\right)'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

Do đó $f'\left(x\right)=\frac{k}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\longrightarrow f'(1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}k+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}k=1\Leftrightarrow k=3.$ **Chọn D.**

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y=x\sqrt{x^2-2x}.$

A. $y'=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}.$ **B.** $y'=\frac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}.$ **C.** $y'=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}.$ **D.** $y'=\frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$

Hướng dẫn.

Ta có $y'=\sqrt{x^2-2x}+x.\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}.$ **Chọn C.**

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$

A. $y'=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$ **B.** $y'=\frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$ **C.** $y'=\frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$ **D.** $y'=\frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$

Hướng dẫn.

Ta có $y'=\frac{\left(x-1\right)'.\sqrt{x^2+1}-\left(x-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\left(x-1\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$

$=\frac{x^2+1-x^2+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$ **Chọn B.**

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}.$

A. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$ **B.** $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}.$ **C.** $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$ **D.** $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(x-\frac{1}{x^2}\right).$

Hướng dẫn.

Ta có $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$ **Chọn A.**

Câu 17. Cho hàm số $y=-3x^3+3x^2-x+5$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(2017\right)$.

A. $y^{(3)}\left(2017\right)=0.$ **B.** $y^{(3)}\left(2017\right)=-2017.$ **C.** $y^{(3)}\left(2017\right)=2017.$ **D.** $y^{(3)}\left(2017\right)=-18.$

Hướng dẫn.

Ta có $y'=-9x^2+6x-1\Rightarrow y''=-18x+6\longrightarrow y^{(3)}=-18.$ **Chọn D.**

Câu 18. Cho hàm số $y=\frac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(1\right)$.

A. $y^{(3)}\left(1\right)=-\frac{3}{4}.$ **B.** $y^{(3)}\left(1\right)=\frac{3}{4}.$ **C.** $y^{(3)}\left(1\right)=-\frac{4}{3}.$ **D.** $y^{(3)}\left(1\right)=\frac{4}{3}.$

Hướng dẫn.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{\left(x+1\right)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{4\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4} = \dfrac{4}{\left(x+1\right)^3} \Rightarrow y^{(3)} = \dfrac{-12\left(x+3\right)^2}{\left(x+1\right)^6} = \dfrac{-12}{\left(x+1\right)^4}$

$\longrightarrow y^{(3)}(1) = \dfrac{-12}{\left(1+1\right)^4} = -\dfrac{3}{4}$. **Chọn A.**

DẠNG 2.2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$.

A. $y' = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$. **B.** $y' = -3\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$. **C.** $y' = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$. **D.** $y' = -3\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Hướng dẫn.

Ta có $y' = \left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)'.\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right) = -3.\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$. **Chọn B.**

Câu 20. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos x^2$.

A. $y' = -2\sin x^2$. **B.** $y' = -4x\cos x^2$. **C.** $y' = -2x\sin x^2$. **D.** $y' = -4x\sin x^2$.

Hướng dẫn.

Ta có $y' = -2.\left(x^2\right)'.\sin x^2 = -2.2x.\sin x^2 = -4x\sin x^2$. **Chọn D.**

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot\sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = -\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Hướng dẫn.

Ta có $y' = -\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **Chọn A.**

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(\tan x\right)$.

A. $y' = \sin\left(\tan x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $y' = -\sin\left(\tan x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $y' = \sin\left(\tan x\right)$. **D.** $y' = -\sin\left(\tan x\right)$.

Hướng dẫn.

Ta có $y' = -\left(\tan x\right)'\sin\left(\tan x\right) = -\dfrac{1}{\cos^2 x}.\sin\left(\tan x\right)$. **Chọn B.**

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \dfrac{-\sin 2x}{\left(\sin x - \cos x\right)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\left(\sin x - \cos x\right)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{2 - 2\sin 2x}{\left(\sin x - \cos x\right)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{-2}{\left(\sin x - \cos x\right)^2}$.

Hướng dẫn.

Ta có $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Suy ra $y' = -\dfrac{1}{\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4} \right)} = -\dfrac{1}{\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}} \right)^2} = \dfrac{-2}{\left(\sin x - \cos x \right)^2}$. **Chọn D.**

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $f\left(x \right) = 5\sin x - 3\cos x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{2} \right) = 3.$ **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2} \right) = -3.$ **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2} \right) = -5.$ **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2} \right) = 5.$

Hướng dẫn.

Ta có $f'\left(x \right) = \left(5\sin x - 3\cos x \right)' = 5\left(\sin x \right)' - 3\left(\cos x \right)' = 5\cos x + 3\sin x$.

Suy ra $f'\left(\dfrac{\pi}{2} \right) = 5\cos\dfrac{\pi}{2} + 3\sin\dfrac{\pi}{2} = 3$. **Chọn A.**

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $f\left(x \right) = 2\sin 3x\cos 5x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{8}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{8} \right) = -8 - \sqrt{2}.$ **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8} \right) = \dfrac{-15\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8} \right) = -8 + \sqrt{2}.$ **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8} \right) = 2 + 4\sqrt{2}.$

Hướng dẫn.

Ta có $f\left(x \right) = 2\sin 3x\cos 5x = \sin 8x - \sin 2x$.

Do đó $f'\left(x \right) = \left(\sin 8x - \sin 2x \right)' = 8\cos 8x - 2\cos 2x.$

Suy ra $f'\left(\dfrac{\pi}{8} \right) = 8\cos\left(8.\dfrac{\pi}{8} \right) - 2\cos\left(2.\dfrac{\pi}{8} \right) = -8 - \sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $f\left(x \right) = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos 3x}$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{3} \right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot$ **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{3} \right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot$ **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{3} \right) = 1.$ **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{3} \right) = 0.$

Hướng dẫn.

Ta có $f'\left(x \right) = -\sqrt{2}.\dfrac{\left(\cos 3x \right)'}{\cos^2 3x} = \dfrac{3\sqrt{2}.\sin 3x}{\cos^2 3x}$. Suy ra $f'\left(\dfrac{\pi}{3} \right) = \dfrac{3\sqrt{2}.\sin \pi}{\cos^2 \pi} = 0.$ **Chọn D.**

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $f\left(x \right) = \sin\left(\pi \sin x \right)$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{6}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{6} \right) = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}\cdot$ **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{6} \right) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{6} \right) = -\dfrac{\pi}{2}\cdot$ **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{6} \right) = 0.$

Hướng dẫn.

Ta có $f'\left(x \right) = \left(\pi \sin x \right)'.\cos\left(\pi \sin x \right) = \pi \cos x.\cos\left(\pi \sin x \right)$.

Suy ra $f'\left(\dfrac{\pi}{6} \right) = \pi.\cos\dfrac{\pi}{6}.\cos\left(\pi.\sin\dfrac{\pi}{6} \right) = \pi.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos\left(\pi.\dfrac{1}{2} \right) = \dfrac{\sqrt{3}.\pi}{2}.\cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$ **Chọn D.**

Câu 28. Hàm số $f\left(x \right) = a\sin x + b\cos x + 1$ có đạo hàm là $f'\left(x \right)$. Để $f'\left(0 \right) = \dfrac{1}{2}$ và $f\left(-\dfrac{\pi}{4} \right) = 1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $a = \dfrac{1}{2}; b = -\dfrac{1}{2}.$ **D.** $a = b = \dfrac{1}{2}.$

Hướng dẫn.

Ta có $f'\left(x \right) = a\cos x - b\sin x.$ Khi đó $\begin{cases} f'\left(0 \right) = \dfrac{1}{2} \\ f\left(-\dfrac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\cos 0 - b\sin 0 = \dfrac{1}{2} \\ a\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + b\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$ **Chọn D.**

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$ **B.** $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ **C.** $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2.$ **D.** $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5.$

Hướng dẫn.

Ta có $f'(x) = 3\cos x.\sin^2 x + 2x \Rightarrow f''(x) = 6\cos^2 x.\sin x - 3\sin^3 x + 2$

$\longrightarrow f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5$. **Chọn D.**

❍ BÀI TOÁN 2: LIÊN QUAN ĐẾN Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA ĐẠO HÀM

Câu 1. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

A. $2\text{m/s}.$ **B.** $3\text{m/s}.$ **C.** $4\text{m/s}.$ **D.** $5\text{m/s}.$

Hướng dẫn.

Ta có ADCT: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Ta tính được $s'(t) = 2t.$

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 2t \longrightarrow v(2) = 2.2 = 4\text{m/s}.$ **Chọn C.**

Câu 2. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1\text{s}.$ **B.** $t = 2\text{s}.$ **C.** $t = 3\text{s}.$ **D.** $t = 6\text{s}.$

Hướng dẫn.

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9.$

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow t = 1.$ **Chọn A.**

Câu 3. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t $(t = 5\text{s})$ đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0{,}001\text{s}.$

A. $v_{\text{tb}} = 49\text{m/s}.$ **B.** $v_{\text{tb}} = 49{,}49\text{m/s}.$ **C.** $v_{\text{tb}} = 49{,}0049\text{m/s}.$ **D.** $v_{\text{tb}} = 49{,}245\text{m/s}.$

Hướng dẫn.

Ta có $v_{\text{tb}} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49{,}0049\text{m/s}.$

Chọn C.

Câu 4. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2017$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ giây.

A. $15\ m/s^2.$ **B.** $9\ m/s^2.$ **C.** $12\ m/s^2.$ **D.** $6\ m/s^2.$

Hướng dẫn.

Ta có $s'(t)=3t^2-6t-9\longrightarrow s''(t)=6t-6.$

Gia tốc của chất điểm $a(t)=s''(t)=6t-6\longrightarrow a(3)=6.3-6=12\,m/s^2$. **Chọn C.**

Câu 5. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t)=t^3+4t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $11\,m/s$ là:

A. $12\,m/s^2$. **B.** $14\,m/s^2$. **C.** $16\,m/s^2$. **D.** $18\,m/s^2$.

Hướng dẫn.

Ta có $v(t)=s'(t)=3t^2+8t\longrightarrow a(t)=v'(t)=6t+8.$

Thời điểm vận tốc của vật bằng $11\,m/s\Rightarrow v(t)=11\Leftrightarrow 3t^2+8t=11\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{11}{3}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Với $t=1\Rightarrow a(1)=6.1+8=14\,m/s^2$. **Chọn B.**

Trên đây là hai bài toán liên quan đến đạo hàm giúp bạn đọc có cái nhìn đa dạng về:
Bài toán 1: Liên quan đến tính đạo hàm theo định nghĩa, theo công thức đạo hàm
Bài toán 2: Liên quan đến ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Tác giả mong muốn phần nào quý bạn đọc nắm vững được hệ thống lý thuyết và cách giải hai bài toán này trong chương trình toán lớp 11. Tuy nhiên các dạng toán khác xin được giới thiệu với quý bạn đọc ở phân sau. Rất mong được sự góp ý của quý bạn đọc.

Thực hiện: Nguyễn Đình Hữu
Duyệt: DangNguyen